УДК 519.6 https://doi.org/10.33271/crpnmu/61.202

© В.Д. Петренко[1], Н.И. Нетеса[1], А.Л. Тютькин[1], Е.В. Громова[1], П.С. Кириченко[2]
[1] Днепровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, Днепр
[2] Криворожский национальный университет, Кривой Рог

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЗАДАЧАХ ВОДОСНАБЖЕНИЯ И ВОДООТВЕДЕНИЯ

© V. Petrenko[1], M. Netesa[1], O. Tiutkin[1], O. Gromova[1], P. Kirichenko[2]
[1] Dnipro National University of Railway Transport named after academician V. Lazaryan, Dnipro
[2] Kryvyi Rih National University, Kryvyi Rih

MATHEMATICAL MODELS IN WATER SUPPLY AND WATER DISCHARGE PROBLEMS

Цель. Целью работы является разработка численных моделей для расчета гидродинамики течения и массопереноса в песколовке, которая имеет дополнительные конструктивный элементы.

Методика исследований. Для решения поставленной задачи использована гидродинамическая модель вихревых течений идеальной жидкости. Для моделирования распространения примеси в песколовке используется двухмерное уравнение конвективно-диффузионного рассеивания примеси в очистном сооружении. Данное уравнение позволяет учесть основные физические факторы, которые влияют на рассеивание примеси в песколовке, а именно: поле скорости потока сточных вод, диффузионный перенос примеси, оседание примеси под действием силы тяжести. Для численного интегрирования моделирующих уравнений используются конечно-разностные схемы. Для расчета уравнения переноса завихренности применяется двухшаговая разностная схема расщепления. Для численного интегрирования уравнения для функции тока применяется многошаговая схема расщепления. Расчет функции тока на каждом шаге расщепления осуществляется по явной схеме. Для численного интегрирования уравнения, описывающего рассеивание примеси в песколовке применяется неявная разностная схема расщепления. Значение концентрации примеси в песколовке рассчитывается также на основе явной формулы.

Результаты исследования. Проведен вычислительный эксперимент на базе разработанных численных моделей. Вычислительный эксперимент проведен с целью оценки эффективности очистки сточных вод в песколовке, содержащей ряд дополнительных конструктивных элементов. Представленные результаты численного моделирования показывают, что разработанные численные модели позволяют рассчитать гидродинамику потока и рассеивание примеси в очистных сооружениях, имеющих сложную геометрическую форму.

Научная новизна. Представлены эффективные численные модели, которые дают возможность рассчитывать эффективность очистки сточных вод в песколовках, имеющих сложную геометрическую форму.

Практическое значение. Построенные численные модели могут использоваться для проведения серийных расчетов по оценке эффективности работы песколовок на стадии их проектирования или при реконструкции уже существующих очистных сооружений.

Ключевые слова: *водопользование; очистка воды; математическое моделирование; песколовка.*

Вступление. Эффективная работа очистных сооружений, которые используются в системах водоснабжения и водоотведения зависит от многих факторов. При проектировании таких сооружений или при реконструкции уже существующих, при изменении условий их эксплуатации, необходимо прогнозировать эффективность очистки природних и сточных вод [3-5]. Для такого прогноза используются различного класса модели : эмпирические, аналитические, численные [1, 2, 6-9]. Эмпирические и аналитические модели позволяют очень быстро рассчитать эффективность очистных сооружений, однако, данные модели не учитывают их геометрическую форму. Численные модели позволяют учесть геометрическую форму очистных сооружений, но требуют значительного времени при проведении вычислительного эксперимента. Поэтому, актуальной задачей является создание численных моделей, которые дают возможность рассчитать эффективность очистных сооружений за приемлемое время.

Целью данной работы является разработка численных моделей для расчета эффективности очистки воды в песколовке, которая используется в системах водоотведения.

Постановка задачи. Рассматривается движение сточных вод в очистном сооружении – песколовке. Необходимо рассчитать эффективность работы данного сооружения при наличии в песколовке дополнительных элементов.

Уравнения гидродинамики. Для расчета поля скорости сточных вод в песколовке будет использоваться модель вихревого течения идеальной жидкости. В этом случае моделирующие уравнения имеют вид [2]

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+\frac{\partial u\omega}{\partial x}+\frac{\partial v\omega}{\partial y}=0\,. \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}=-\omega\,. \tag{2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}=u\,,\quad \frac{\partial \psi}{\partial x}=-v\,. \tag{3}$$

где ω – завихренность; ψ – функция тока; u, v – компоненты вектора скорости потока сточных вод.

Постановка граничных условий для моделирующих уравнений приведена в [2].

Уравнение движения загрязнителя в очистном сооружении. Для расчета концентрации загрязнителя в очистном сооружении будет использоваться двухмерное уравнение конвективно-диффузионного переноса примеси [1, 2]:

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{\partial uC}{\partial x}+\frac{\partial (v-w)C}{\partial y}= =\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_x\frac{\partial C}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_y\frac{\partial C}{\partial y}\right), \tag{4}$$

где C – концентрация примеси в сточных водах; μ_x, μ_y – коэффициенты диффузии; w – скорость оседания частиц примеси; t – время.

Для данного моделирующего уравнения ставятся такие граничные условия [1, 2]:

1. на входе в песколовку $C = C_{in}$, где C_{in} – заданная концентрация;

2. на выходе из песколовки $C_{i+1,j} = C_{i,j}$, где $C_{i+1,j}$ – значение концентрации примеси впоследней разностной ячейке.

3. на дне и стенках песколовки, а также на дополнительных элементах в ней :

$$\frac{\partial C}{\partial n} = 0$$

Начальное условие ($t = 0$) : $C = 0$.

Численное решение уравнений гидродинамики. Для численного решения уравнений гидродинамики используются разностные схемы расщепления [1, 2]. Так, разностная схема для численного решения уравнения переноса завихренности записывается так:

– первый шаг расщепления:

$$\frac{\omega_{i,j}^{n+1/2} + \omega_{i,j}^{n}}{\Delta t} + \frac{\overset{+}{u}_{i+1,j}\omega_{i,j}^{n+1/2} - \overset{+}{u}_{i+1,j}\omega_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x} + \frac{\overset{+}{v}_{i,j+1}\omega_{i,j} - \overset{+}{v}_{i,j-1}\omega_{i,j-1}}{\Delta y} = 0;$$

– второй шаг расщепления:

$$\frac{\omega_{ij}^{n+1} - \omega_{ij}^{n+1}}{\Delta t} + \frac{\overset{-}{u}_{i+1,j}\omega_{i+1,j}^{n+1} - \overset{-}{u}_{i,j}\omega_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{\overset{-}{v}_{i,j+1}\omega_{i,j+1}^{n+1} - \overset{-}{v}_{i,j-1}\omega_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} = 0.$$

На каждом шаге значение завихренности рассчитывается по явной формуле.

После расчета поля скорости завихренности начинается решение уравнения для функции тока. Данное уравнение записывается так

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \omega, \tag{5}$$

здесь η – фиктивное время.

Дальше используется такая схема расщепления [1]:

– первый шаг

$$\frac{\psi_{ij}^{n+1/4} - \psi_{ij}^{n}}{\Delta t} = \frac{\overline{\psi_{ij}}}{2};$$

– второй шаг

$$\frac{\psi_{i,j}^{n+1/2} - \psi_{i,j}^{n}}{\Delta t} = -\frac{\psi_{i,j}^{n+1/2} - \psi_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} - \frac{\psi_{i,j}^{n+1/2} - \psi_{i,j-1}^{n+1/2}}{\Delta y^2};$$

– третий шаг

$$\frac{\psi_{i,j}^{n+3/4}-\psi_{ij}^{n+1/2}}{\Delta t}=\frac{\psi_{i+1,j}^{n+3/4}-\psi_{i,j}^{n+3/4}}{\Delta x^2}+\frac{\psi_{i,j+1}^{n+3/4}-\psi_{i,j}^{n+3/4}}{\Delta y^2};$$

– четвертый шаг

$$\frac{\psi_{ij}^{n+1}-\psi_{ij}^{n+3/4}}{\Delta t}=\frac{\overline{\omega_{i,j}}}{2},$$

где $\overline{\omega_{i,j}}=\frac{1}{4}\left(\omega_{i,j}+\omega_{i-1,j+1}\omega_{i-1,j-1}+\omega_{i,j-1}\right).$

Данная схема расщепления также имеет особенность – расчет значения функции тока осуществляется по явной формуле.

Для численного решения уравнения переноса примеси в песколовке осуществляется по неявной разностной схеме расщепления [1, 2]. Разностные уравнения записываются так

– первый шаг ($k=\frac{1}{4}$):

$$\frac{C_{ij}^{n+k}-C_{ij}^{n}}{\Delta t}+\frac{1}{2}\left(L_x^{+}C^k+L_y^{+}C^k\right)+\frac{\sigma}{2}C_{ij}^{n}=0;$$

– второй шаг ($k=n+\frac{1}{2};c=n+\frac{1}{4}$):

$$\frac{C_{ij}^{k}-C_{ij}^{c}}{\Delta t}+\frac{1}{2}\left(L_x^{-}C^k+L_y^{-}C^k\right)+\frac{\sigma}{2}C_{ij}^{k}=0;$$

– третий шаг ($k=n+\frac{3}{4};c=n+\frac{1}{2}$):

$$\frac{C_{ij}^{k}-C_{ij}^{c}}{\Delta t}=\frac{1}{2}\left(M_{xx}^{-}C^c+M_{xx}^{+}C^k+M_{yy}^{-}C^c+M_{yy}^{+}C^k\right);$$

– четвертый шаг ($k=n+1;c=n+\frac{3}{4}$):

$$\frac{C_{ij}^{k}-C_{ij}^{c}}{\Delta t}=\frac{1}{2}\left(M_{xx}^{-}C^k+M_{xx}^{+}C^c+M_{yy}^{-}C^k+M_{yy}^{+}C^c\right).$$

Здесь используются разностный операторы

$$M_{yy}^{-}C^{n+1}+M_{yy}^{+}C^{n+1}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_y\frac{\partial C}{\partial y}\right)\approx\tilde{\mu}_{y_1}\frac{C_{i,j+1}^{n+1}-C_{ij}^{n+1}}{\Delta y^2}-\tilde{\mu}_{y_2}\frac{C_{i,j}^{n+1}-C_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2},$$

$$\frac{\partial u^+C}{\partial x}\approx\frac{u_{i+1,j}^{+}C_{ij}^{n+1}-u_{ij}^{+}C_{i-1j}^{n+1}}{\Delta x}=L_x^{+}C^{n+1},$$

$$\frac{\partial uC}{\partial x}=\frac{\partial u^+C}{\partial x}+\frac{\partial u^-C}{\partial x},$$

$$u^+=\frac{u+|u|}{2},\ u^-=\frac{u-|u|}{2},$$

и т.д. [1, 2].

Концентрация примеси определяется по явной формуле на каждом шаге расщепления.

Результаты. Была выполнена программная реализация разработанной численной модели. Ниже представлены результаты проведенного численного эксперимента. Рассматривается движение сточных вод в песколовке, где размещены дополнительные элементы. Наличие таких элементов приводит к формированию сложной гидродинамической картины внутри сооружения (рис.).

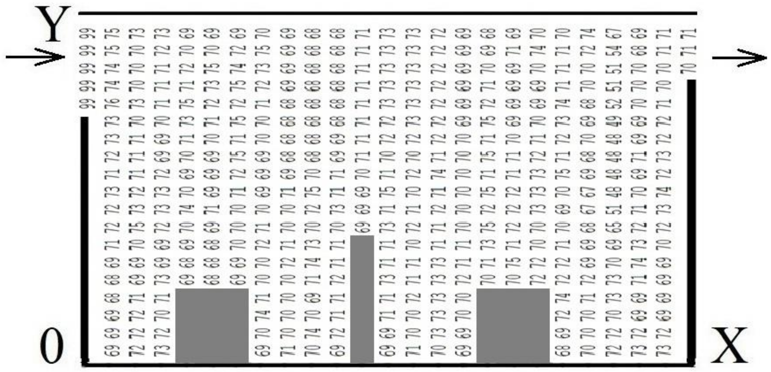

Рис. Поле концентрации примеси в песколовке

Из представленного рисунка видно, что концентрация примеси в сточных водах, на выходе из песколовки составляет 70% - 71%. Это число определяет эффективность работы песколовки.

Время расчета составляет 10 секунд. Необходимо подчеркнуть, что данная модель может быть использована для решения задач в области очистки природных вод.

Выводы. Представлена численная модель для расчета эффективности работы песколовки. Расчет гидродинамики в песколовке осуществляется на базе уравнений движения вихревых потоков несжимаемой жидкости. Для расчета поля концентрации примеси в песколовке используется двухмерное уравнение конвективно-диффузионного переноса. Особенностью построенной модели является возможность расчета сооружений для очистки сточных вод.

Перечень ссылок

1. Беляев, Н.Н., & Нагорная, Е.К. (2012). *Математическое моделирование массопереноса в отстойниках систем водоотведения. Монография*. Новая идеология.
2. Беляев, Н.Н., & Козачина, В.А. (2015). *Математическое моделирование массопереноса в горизонтальных отстойниках. Монография*. Акцент ПП.
3. Василенко, О.А., Грабовський, П.О., Ларкіна, Г.М., Поліщук, О.В., & Прогульний, В.Й. (2010). *Реконструкція і інтенсифікація споруд водопостачання та водовідведення. Навч. посіб*. ІВНВКП «Укргеліотек».
4. *ДБН В.2.5-75:2013. Каналізація. Зовнішні мережі та споруди. Основні положення проектування. [Чинний від 2014-01-01]*. (2013). Мінрегіон України.
5. Епоян, С.М., Колотило, В.Д., & Друшляк, О.Г. (2010). *Водопостачання та очистка природних вод. Навчальний посібник.* Фактор.

6. Олійник, О. Я., & Айрапетян, Т. С. (2015). Моделювання очистки стічних вод від органічних забруднень в біореакторах-аеротенках зі зваженим (вільноплаваючим) і закріпленим біоценозом. *Доповіді НАНУ*, (5), 55-60. https://doi.org/10.15407/dopovidi2015.05.055
7. Alharbi, A. O. M. (2016). The biological treatment of wastewater: mathematical models. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, *94*(2), 347–348. https://doi.org/10.1017/S0004972716000411
8. Griborio, A. (2004). *Secondary Clarifier Modeling: A Multi-Process Approach*. *Dissertation and Theses.* University of New Orleans.
9. Młyński, D., Bugajski, P., & Młyńska, A. (2019). Application of the Mathematical Simulation Methods for the Assessment of the Wastewater Treatment Plant Operation Work Reliability. *Water*, *11*(5), 873. https://doi.org/10.3390/w11050873

АНОТАЦІЯ

Мета. Метою роботи є розробка математичної моделі для оцінки динаміки забруднення атмосферного повітря у разі нестаціонарної емісії хімічно небезпечної речовини на промисловому об'єкті.

Методика досліджень. Для вирішення поставленої задачі використана гідродинамічна модель вихрових течій ідеальної рідини. Для моделювання поширення домішки в пісколовці використовується двовимірне рівняння конвективно-дифузійного розсіювання домішки в очисній споруді. Дане рівняння дозволяє врахувати основні фізичні фактори, які впливають на розсіювання домішки в пісколовці, а саме: поле швидкості потоку стічних вод, дифузійне перенесення домішки, осідання домішки під дією сили тяжіння. Для чисельного інтегрування моделюючих рівнянь використовуються кінцево-різницеві схеми. Для розрахунку рівняння переносу завихореності застосовується двокрокова різницева схема розщеплення. Для чисельного інтегрування рівняння для функції струму застосовується багатокрокова схема розщеплення. Розрахунок функції струму на кожному кроці розщеплення здійснюється за явною схемою. Для чисельного інтегрування рівняння, що описує розсіювання домішки в пісколовці застосовується неявна різницева схема розщеплення. Значення концентрації домішки в пісколовці розраховується також на основі явної формули.

Результати дослідження. Проведено обчислювальний експеримент на базі розроблених чисельних моделей. Обчислювальний експеримент проведений з метою оцінки ефективності очищення стічних вод в пісколовці, що містить ряд додаткових конструктивних елементів. Представлені результати чисельного моделювання показують, що розроблені чисельні моделі дозволяють розрахувати гідродинаміку потоку і розсіювання домішки в очисних спорудах, що мають складну геометричну форму.

Наукова новизна. Представлені ефективні чисельні моделі, які дають можливість розраховувати ефективність очищення стічних вод в пісколовках, що мають складну геометричну форму.

Практичне значення. Побудовані чисельні моделі можуть використовуватися для проведення серійних розрахунків по оцінці ефективності роботи пісколовок на стадії їх проектування або при реконструкції вже існуючих очисних споруд.

Ключові слова: водокористування; очистка води; математичне моделювання; пісковловлювач.

ABSTRACT

Purpose. The purpose of the work is to develop numerical models for calculating the hydrodynamics of flow and mass transfer in a sand trap, which has additional structural elements.

Methodology. To solve this problem, a hydrodynamic model of the vortex flows of an ideal fluid was used. To model the propagation of an impurity in a sand trap, the two-dimensional equation of convective-diffusion dispersion of an impurity in a treatment plant is used. This equation allows you to take into account the main physical factors that affect the dispersion of an impurity in a sand trap, namely: the field of the flow rate of wastewater, diffusion transport of an impurity, and the settling of an impurity under the influence of gravity. For numerical integration of modeling equations finite difference schemes are used. To calculate the vorticity transfer equation, a two-step difference splitting scheme is used. For the numerical integration of the equation for the stream function, a multi-step splitting scheme is used. The calculation of the current function at each step of the splitting is carried out according to an explicit scheme. To numerically integrate the equation describing the dispersion of an impurity in a sand trap, an implicit difference-splitting scheme is used. The impurity concentration in the sand trap is also calculated on the basis of an explicit formula.

The results. A computational experiment based on the developed numerical models is carried out. A computational experiment was conducted to evaluate the effectiveness of wastewater treatment in a sand trap containing a number of additional structural elements. The presented results of numerical modeling show that the developed numerical models make it possible to calculate the flow hydrodynamics and dispersion of impurities in sewage treatment plants having a complex geometric shape.

Scientific novelty. Effective numerical models are presented that make it possible to calculate the efficiency of wastewater treatment in sand traps having a complex geometric shape.

Practical significance. The constructed numerical models can be used for conducting serial calculations to assess the efficiency of sand traps at the design stage or during the reconstruction of existing treatment facilities.

Keywords: water use; water purification; mathematical modeling; sand trap.