

© В.П. Андрієвський¹, І.Ю. Мартинюк¹, О.В. Максим'юк¹

¹ Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, Україна

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ ФУР'Є, ПОЛІНОМІВ І МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

© V. Andriievskiy¹, I. Martyniuk¹, O. Maksymiuk¹

¹ Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv, Ukraine

NUMERICAL INVESTIGATION OF CONVERGENCE OF FOURIER SERIES, POLY-NOMIALS, AND METHOD OF FINITE ELEMENTS

Мета. Порівняння ефективності застосування скінченних елементів зі змінними і усередненими механічними і геометричними параметрами та дослідження збіжності результатів розрахунку напіваналітичним методом скінченних елементів (НМСЕ) при застосуванні рядів Фур'є та поліномів і результатів отриманих методом скінченних елементів (МСЕ).

Методика. Побудова та розробка алгоритму дослідження напружено-деформованого стану просторових тіл зі змінними і усередненими механічними і геометричними параметрами виконана на основі НМСЕ.

Результати. Отримано розв'язувальні співвідношення НМСЕ для обчислення вузлових реакцій та коефіцієнтів матриці жорсткості скінченного елемента зі змінними і усередненими механічними і геометричними параметрами. Чисельні дослідження збіжності результатів розрахунків отриманих НМСЕ при застосуванні рядів Фур'є та поліномів і методу скінченних елементів проведено для контрольного прикладу, в якості якого обрано задачу Бусінеска для півплощини, яка навантажена зосередженою силою. Отримані результати показують, що збіжність досліджуваних координатних функцій в розглянутій задачі одного порядку.

Наукова новизна. Отримані розв'язувальні співвідношення НМСЕ для обчислення вузлових реакцій та коефіцієнтів матриці жорсткості скінченного елемента зі змінними і усередненими механічними і геометричними параметрами дозволяють проводити дослідження різного класу задач. На контрольному прикладі проведено чисельні дослідження збіжності результатів з застосуванням рядів Фур'є, поліномів і методу скінченних елементів.

Практична значимість. Практична значимість полягає у створенні методики для визначення напружено-деформованого стану відповідальних просторових елементів конструкцій зі змінними і усередненими механічними і геометричними параметрами, що знаходяться під дією довільно розподілених в просторі навантажень.

Ключові слова: скінченний елемент, метод скінчених елементів, напіваналітичний метод скінчених елементів, напружено-деформований стан, вузлові реакції, матриця жорсткості, ряди Фур'є, поліноми, чисельні дослідження.

Вступ. Серед проблем, що відносяться до розробки чисельних методів розрахунку конструкцій на основі МСЕ, слід особливу увагу приділити обґрунтуванню достовірності отриманих результатів і порівняння ефективності підходів, що розглядаються [1, 2]. Теоретично це не завжди вдається виконати навіть для окремих випадків задач, через це до вирішення зазначених питань залучаються, як правило, дані чисельних експериментів, які отримують на контрольних задачах. У цій роботі шляхом вирішення конкретних задач проводиться порівняння

ефективності скінченних елементів зі змінними і усередненими механічними та геометричними параметрами і досліджується збіжність рядів Фур'є, поліномів і МСЕ.

Основна частина. Наведемо основні вихідні співвідношення теорії пружності і пластичності в криволінійній системі координат, що використовуються в НМСЕ.

Розглянемо в декартовій системі координат Z^i , яку в подальшому будемо називати базисною, довільно навантажене призматичне тіло (рис. 1), утворене рухом нормальної Z^3 площини складної форми. Відмінною особливістю таких тіл є довільний характер розподілу механічних і геометричних параметрів в поперечному перерізі і їх сталість у напрямку Z^3 . Базова система координат призначена для задання граничних умов, зовнішніх впливів, механічних і геометричних характеристик об'єкта. Опис напружено-деформованого стану тіла складної форми набагато зручніше проводити в місцевій системі координат, що в свою чергу пов'язана з геометрією тіла. Враховуючи вище зазначене, введемо в розгляд місцеву криволінійну схему координат X^i , осі X^1 і X^2 розташовані в площині $Z^3 = const$, а X^3 збігається за напрямком з Z^3 .

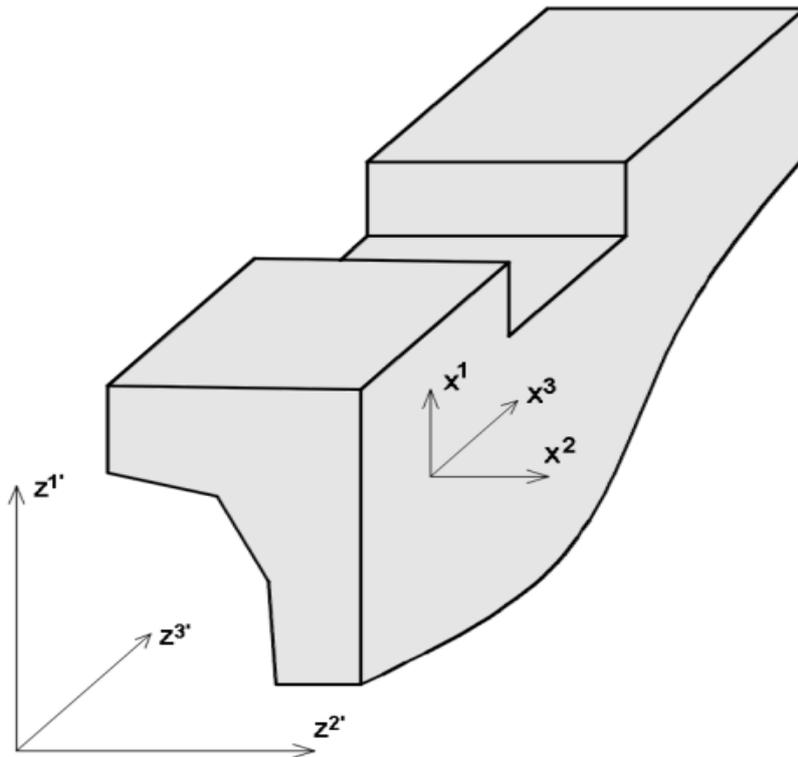


Рис. 1. Довільно навантажене призматичне тіло

Нехай зв'язок між базисною декартовою системою координат Z^i і місцевою криволінійною X^i в будь-якій точці тіла визначається тензором перетворення $Z^i_{,l}$, компоненти якого рівні [2]:

$$Z^{\alpha'}_{,\beta} = \frac{\partial Z^{\alpha'}}{\partial X^{\beta}}, \quad Z^3_{,3} = \frac{\partial Z^3}{\partial X^3}, \quad Z^3_{,\alpha} = Z^{\alpha'}_{,3} = 0. \quad (1)$$

Тут і надалі індекси, позначені грецькими буквами, приймають значення 1, 2; латинськими – 1, 2, 3. За індексами, що розташовані в дужках, підсумовування не проводиться.

Тоді коваріантні компоненти метричного тензора місцевої системи координат можна представити через коваріантні компоненти базисної системи:

$$q_{\alpha\beta} = q_{\gamma'\mu'} Z_{,\alpha}^{\gamma'} Z_{,\beta}^{\mu'}, \quad q_{33} = q_{3'3'} Z_{,3}^{3'} Z_{,3}^{3'}. \quad (2)$$

Беручи до уваги, що в декартовій системі координат

$$q_{i'(i')} = 1, \quad q_{\gamma'\mu'} = 0, \quad (\gamma' \neq \mu'), \quad (3)$$

вираз (2) можна спростити:

$$q_{\alpha\beta} = Z_{,\alpha}^{\gamma'} Z_{,\beta}^{\gamma'}, \quad q_{33} = Z_{,3}^{3'} Z_{,3}^{3'}. \quad (4)$$

Контрваріантні компоненти метричного тензора виражаються через коваріантні за формулою:

$$q^{\alpha\beta} = \frac{A(q_{\alpha\beta})}{q}, \quad q^{33} = \frac{1}{q_{33}}, \quad (5)$$

де $A(q_{\alpha\beta})$ – алгебраїчне доповнення до елемента $(q_{\alpha\beta})$ матриці, складеної з коваріантних компонент метричного тензора; q – визначник цієї матриці.

Компоненти тензора деформацій в місцевій системі координат визначаються співвідношенням [1, 3]

$$E_{iI} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial X^I} + \frac{\partial U_I}{\partial X^i} \right) - U_k \Gamma_{iI}^k, \quad (6)$$

де Γ_{iI}^k – символи Крістофеля другого роду; U_I – переміщення в місцевій системі координат.

Виразимо переміщення і символи Крістофеля їх значеннями в базисній системі координат:

$$U_k = U_{s'} Z_{,k}^{s'}, \quad (7)$$

$$\Gamma_{iI}^k = X_{,\ell}^k Z_{,i}^{m'} Z_{,I}^{n'} \Gamma_{m'n'}^{\ell'} + X_{\ell'}^k Z_{,i}^{m'} \frac{\partial Z_{,I}^{\ell'}}{\partial Z^{m'}}, \quad (8)$$

де

$$X_{\ell'}^k = \frac{\partial X^k}{\partial Z^{\ell'}}, \quad z_{,k}^{s'} \cdot x_{e'}^k = \delta_{e'}^{s'}.$$

Після підстановки (7) і (8) в (6) і приведення подібних отримуємо:

$$E_{iI} = \frac{1}{2} \left(U_{s',i} Z_{,I}^{s'} + U_{s',I} Z_{,i}^{s'} \right) - U_{s'} Z_{,i}^{m'} Z_{,I}^{n'} \Gamma_{m'n'}^{s'}. \quad (9)$$

Оскільки в декартовій системі координат всі символи Крістоффеля дорівнюють нулю вираз (9) можна переписати у вигляді:

$$E_{iI} = \frac{1}{2} \left(U_{s',i} Z_{,I}^{s'} + U_{s',I} Z_{,i}^{s'} \right). \quad (10)$$

Зв'язок між компонентами тензора напружень і тензора деформацій прийнятий відповідно до узагальненого закону Гука:

$$\sigma^{iI} = C^{iIk\ell} E_{k\ell}, \quad (11)$$

де $C^{iIk\ell}$ – компоненти тензора пружних постійних.

Для ізотропного тіла компоненти тензора пружних постійних визначаються через коефіцієнти Ляме:

$$C^{iIk\ell} = \lambda g^{iI} g^{k\ell} + \mu \left(g^{I\ell} g^{ik} + g^{i\ell} g^{Ik} \right), \quad (12)$$

які легко обчислити, знаючи модуль пружності матеріалу і коефіцієнт Пуассона:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (13)$$

При описі пластичного деформування використовуються співвідношення теорії пластичної течії для ізотропно зміцнюваного матеріалу [1]:

1. Повне збільшення деформацій dE_{iI} дорівнюють сумі пружних dE_{iI}^e і пластичних dE_{iI}^p складових

$$dE_{iI} = dE_{iI}^e + dE_{iI}^p. \quad (14)$$

2. Матеріал пластично нестискаємий і зміна його об'єму лінійно-пружна. У початковому стані матеріал є ізотропним і однорідним:

$$dE_{i(i)}^p = 0, \quad dE_{i(i)} = dE_{i(i)}^e. \quad (15)$$

3. Пружні деформації пов'язані з напруженнями законом Гука (11).

4. Область пружних деформацій обмежена поверхнею текучості, рівняння якої в просторі напружень за умови текучості Мізеса має вигляд:

$$f = \frac{1}{2} S_{iI} S^{iI} - \tau_s^2 = 0, \quad (16)$$

де: τ_s – межа текучості при чистому зсуві, що залежить від параметра зміцнення Одквіста χ :

$$\tau_s = \tau_s(\chi), \quad \chi = \int \sqrt{\frac{2}{3} dE_{iI}^p dE_{iI}^p}. \quad (17)$$

5. Відповідно з асоційованим законом зв'язок між девіатором напружень і збільшенням пластичних деформацій визначається співвідношенням:

$$dE_{iI}^{\rho} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial S_{iI}} = d\lambda S_{iI}, \quad (18)$$

де S_{iI} – девіатор тензора напружень:

$$S_{iI} = \sigma_{iI} - \frac{1}{3} \delta_{iI} \sigma_{iI}. \quad (19)$$

Нижче приведемо формули для обчислення вузлових реакцій та коефіцієнтів матриці жорсткості СЕ при застосуванні поліномів. Формули для обчислення при застосуванні рядів Фур'є наведені в роботі [4].

Представимо переміщення у вигляді розкладання по поліномах

$$U_{n'} = \sum_{l=0}^L \bar{U}_n^l \varphi^{(l)}, \quad (20)$$

де $\varphi^{(l)}$ – поліноми степені l ; \bar{U}_n^l – коефіцієнти розкладання переміщень по $\varphi^{(l)}$.

Подамо переміщення через коефіцієнти їх розкладання за поліномами відповідно до (20):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha(\alpha)} &= \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{l=0}^L \frac{1}{2} \left[\overset{\circ}{Z}_{,\alpha} \gamma' S_{(\alpha)} + \left(\overset{\circ}{Z}_{,12} \gamma' S_{(\alpha)} + 2 \overset{\circ}{Z}_{,\alpha} \gamma' S_1 S_2 \right) x^{(3-\alpha)} \right] \varphi^{(l)} \bar{U}_{\gamma'(S_1, S_2)}^l; \\ \varepsilon_{12} &= \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{l=0}^L \frac{1}{4} \left(\overset{\circ}{Z}_{,1} \gamma' S_2 + \overset{\circ}{Z}_{,2} \gamma' S_1 \right) \varphi^{(l)} \bar{U}_{\gamma'(S_1, S_2)}^l; \\ \varepsilon_{\alpha 3} &= \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{l=0}^L \left\{ \frac{1}{8} \left[\overset{\circ}{Z}_{,\alpha} \gamma' + \left(\overset{\circ}{Z}_{,12} \gamma' + 2 \overset{\circ}{Z}_{,\alpha} \gamma' S_{(3-\alpha)} \right) x^{(3-\alpha)} \right] \varphi_{,3}^{(l)} \bar{U}_{\gamma'(S_1, S_2)}^l + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \overset{\circ}{Z}_{,3} \gamma' \left(S_{\alpha} + 2 S_1 S_2 x^{(3-\alpha)} \right) \varphi^{(l)} \bar{U}_{3'(S_1, S_2)}^l \right\}; \\ \varepsilon_{33} &= \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{l=0}^L \frac{1}{4} \overset{\circ}{Z}_{,3} \gamma' \left(1 + 2 S_{\alpha} x^{\alpha} \right) \varphi_{,3}^{(l)} \bar{U}_{3'(S_1, S_2)}^l, \end{aligned} \quad (21)$$

де

$$\varphi_{,3}^{(l)} = \frac{d\varphi^{(l)}}{dx^3}. \quad (22)$$

Виразимо деформації через коефіцієнти розкладання переміщень по поліномах:

$$\{\varepsilon\} = \sum_{l=0}^L \left([\bar{B}_1] \varphi^{(l)} + [\bar{B}_2] \varphi_{,3}^{(l)} \right) \{\bar{U}\}_l, \quad (23)$$

де

$$\begin{aligned} [\bar{B}_1] &= \left[[\bar{B}_1]^{(-1,-1)} [\bar{B}_1]^{(+1,-1)} [\bar{B}_1]^{(-1,+1)} [\bar{B}_1]^{(+1,+1)} \right], \\ [\bar{B}_2] &= \left[[\bar{B}_2]^{(-1,-1)} [\bar{B}_2]^{(+1,-1)} [\bar{B}_2]^{(-1,+1)} [\bar{B}_2]^{(+1,+1)} \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Елементи підматриць $[\bar{B}_1]^{(S_1, S_2)}$ і $[\bar{B}_2]^{(S_1, S_2)}$ обчислюються згідно [5].

Запишемо вираз варіації енергії через коефіцієнти розкладання переміщень по поліномах і вузлові реакції $\{\bar{r}\}$ кінцевого елемента:

$$\delta W = \sum_{l=0}^L \left(\delta \{\bar{U}\}_l^T \right) \{\bar{r}\}_l, \quad (25)$$

де

$$\begin{aligned} \{\bar{r}\}_l &= \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \left([\bar{B}_1]^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \{\sigma\} \varphi^{(l)} dx^3 + \right. \\ &\quad \left. + [\bar{B}_2]^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \{\sigma\} \varphi_{,3}^{(l)} dx^3 \right) \sqrt{g} dx^1 dx^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Запишемо вираз для варіації енергії деформації у вигляді:

$$\delta W = \sum_{l=0}^L \left(\delta \{\bar{U}\}_l^T \right) [\bar{K}]_{ln} \{\bar{U}\}_n, \quad (27)$$

де

$$\begin{aligned} [\bar{K}]_{ln} &= \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \left([\bar{B}_1]^T [D] [\bar{B}_1] G_1^{ln} + [\bar{B}_2]^T [D] [\bar{B}_1] G_2^{ln} + \right. \\ &\quad \left. + [\bar{B}_1]^T [D] [\bar{B}_2] G_3^{ln} + [\bar{B}_2]^T [D] [\bar{B}_2] G_4^{ln} \right) \sqrt{g} dx^1 dx^2. \end{aligned}$$

Після інтегрування по x^1 і x^2 , отримуємо формулу для обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості призматичного кінцевого елемента зі змінними в перерізі $x^3 = const$ механічними і геометричними параметрами (CE1):

$$\begin{aligned} [\bar{K}]_{ln} &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^I \left[\left([\bar{B}_1]^T [D] [\bar{B}_1] G_1^{ln} + [\bar{B}_2]^T [D] [\bar{B}_1] G_2^{ln} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + [\bar{B}_1]^T [D] [\bar{B}_2] G_3^{ln} + [\bar{B}_2]^T [D] [\bar{B}_2] G_4^{ln} \right) \sqrt{g} H_i H_j \right]_{(x_i^1, x_j^2)}. \end{aligned} \quad (28)$$

Проведемо дослідження збіжності результатів НМСЕ при застосуванні рядів Фур'є, поліномів і скінчено елементної дискретизації

До числа основних показників, що дозволяють оцінити ефективність різних варіантів методу скінчених елементів, відноситься швидкість збіжності рішень при збільшенні числа невідомих, котра значно залежить від використовуваних систем координатних функцій. У зв'язку з цим слід порівняти швидкість збіжності тригонометричних рядів, поліномів і кусково-лінійної апроксимації переміщень у напрямку x^3 . Особливий інтерес представляють задачі про визначення напружено-деформованого стану призматичних тіл при дії локалізованих навантажень, так як саме в цих випадках можна очікувати зниження ефективності НМСЕ по відношенню до МСЕ [1], а також задача пружно-пластичної рівноваги. Тому в якості контрольного прикладу для проведення зазначених досліджень обрана задача Бусінеска для півплощини, навантажена зосередженою силою [6].

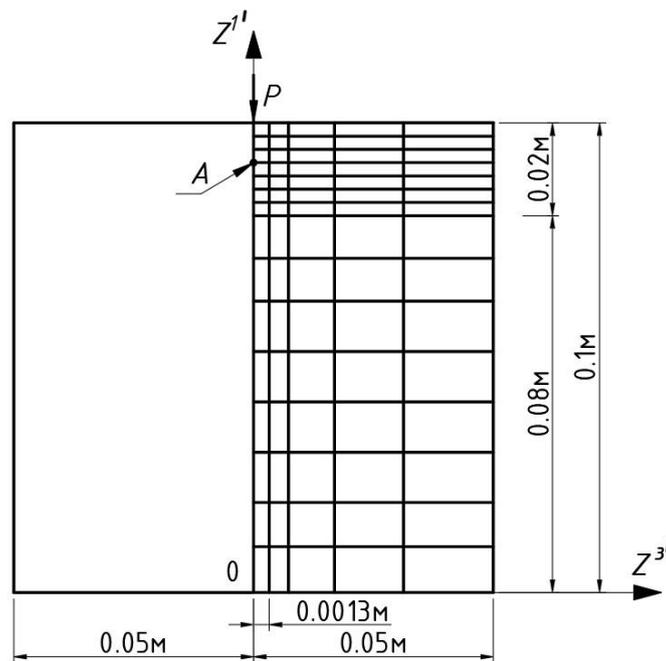


Рис. 2. Розрахункова схема

Розрахункова схема задачі Бусінеска приведена на рис. 2. Розглянуті системи координатних функцій не дозволяють визначити напруження безпосередньо в точці прикладання зосередженої сили як на основі МСЕ, так і на основі НМСЕ. Тому їх збіжність будемо досліджувати вздовж лінії $Z^1 = const$, що проходить на деякій відстані від межі півплощини, наприклад, рівній 0,01 м. При розрахунку методом скінчених елементів замість півплощини використана область кінцевих розмірів, підібраних таким чином, що граничні умови надавали незначний вплив на напружений стан в області прикладання зосередженої сили $P = 1$. Проведені дослідження показали, що можна обмежитися квадратом зі сторонами 0,1 м, так як збільшення його розмірів в 2 рази призводить до зміни величини напруження σ^{11} в точці A ($Z^1 = 9,0$; $Z^3 = 0$), менше, ніж на 1%. Розділення виділеного квадрата на скінченні елементи для розрахунку МСЕ показано на

рис. 2. Він поділений на дві частини в кожній з яких у напрямку Z^1 прийнятий рівномірний крок сітки. У напрямку Z^3 розміри СЕ визначаються відповідно до закону арифметичної прогресії.

Для НМСЕ розбивка на елементи вздовж осі Z^1 така ж як і для МСЕ, а у напрямку Z^2 виділений шар скінченних елементів закріплений від переміщень вздовж U_2 , завдяки чому задовольняються умови плоскої деформації. Дослідження по збіжності рішень в залежності від кількості скінченних елементів вздовж Z^1 показали, що на ділянці $0 \leq Z^1 \leq 0,08$ м достатньо восьми, а на ділянці $0,08 \leq Z^1 \leq 0,1$ м - семи СЕ для отримання стійких результатів.

Дані, що характеризують точність визначення $\sigma^{1'1'}$ в точці А в залежності від кількості невідомих, приведені в таблиці. Тут M – кількість вузлів сіткової області МСЕ або утримуваних членів розкладання НМСЕ у напрямку Z^3 . Похибка значень $\sigma^{1'1'}$ визначена по відношенню до еталонного рішення (табл.) [6]:

$$\sigma^{1'1'} = -2/\pi$$

Таблиця

Точність визначення $\sigma^{1'1'}$ в точці А в залежності від кількості невідомих

M	МСЕ	Фур'є	Поліноми
5	6,3%	7,8%	5,0%
10	4,4%	1,9%	2,8%
20	3,8%	1,5%	2,3%

На рис. 3 суцільною лінією зображена еталонна епюра напружень $\sigma^{1'1'}$, що побудована вздовж лінії $Z^1 = 0,09$ м на ділянці $0 \leq Z^3 \leq 0,02$ м. Кругами, квадратами і ромбами позначені значення, обчислені при $M = 10$ на базі МСЕ, рядів Фур'є і поліномів відповідно.

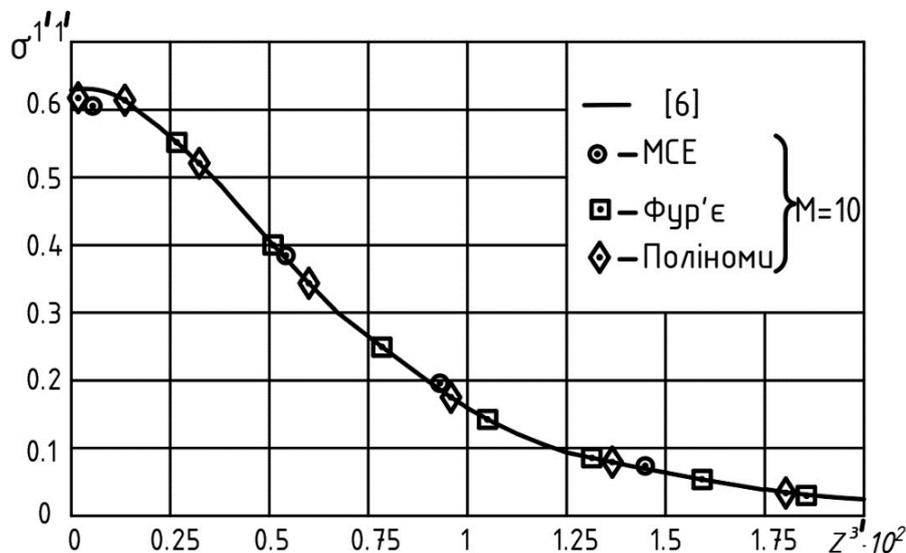


Рис. 3. Розподіл напружень

Висновок. Наведені результати показують, що збіжність досліджуваних координатних функцій в розглянутій задачі одного порядку, причому при $M \geq 10$ точність рішення НМСЕ навіть трохи вище, ніж МСЕ.

Перелік посилань

1. Баженов, В.А., Гуляр, О.І., Пискунов, С.О., & Сахаров, О.С. (2005). *Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах руйнування просторових тіл*. КНУБА.
2. Баженов, В.А., Гуляр, О.І., Пискунов, С.О., & Сахаров, О.С. (2014). *Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах руйнування просторових тіл*. Каравела.
3. Іванченко, Г., Максим'юк, Ю., Козак, А., & Мартинюк, І. (2021). Побудова розв'язувальних рівнянь напіваналітичного методу скінчених елементів для призматичних тіл складної форми. *Управління розвитком складних систем*, (46), 55–62.
<https://doi.org/10.32347/2412-9933.2021.46>
4. Максим'юк, Ю., Козак, А., Мартинюк, І., & Максим'юк, О. (2021). Особливості виведення формул для обчислення вузлових реакцій і коефіцієнтів матриці жорсткості скінченого елемента з усередненими механічними і геометричними параметрами. *Будівельні конструкції. Теорія і практика*, (8), 97–108.
<https://doi.org/10.32347/2522-4182.8.2021>
5. Баженов, В.А., Пискунов, С.О., Солодей, І.І., Андрієвський, В.П., & Сизевич, Б.І. (2005). Матриця жорсткості і вектор вузлових реакцій скінченного елемента для розв'язання просторових задач термов'язкопружнопластичності НМСЕ. *Опір матеріалів і теорія споруд*, 76, 3–26.
6. Novatskii, V. (1975). *Teoriya uprugosti*. Mir.

ABSTRACT

Purpose. To compare the efficiency of using finite elements with variable and averaged mechanical and geometric parameters and to investigate the convergence of results obtained by the semi-analytical finite element method (SAFEM) using Fourier series and polynomials with the results obtained by the finite element method (FEM).

The methods. The construction and development of an algorithm for studying the stress-strain state of spatial bodies with variable and averaged mechanical and geometric parameters were carried out based on SAFEM.

Findings. Solvability indicators of SAFEM were obtained for calculating nodal reactions and stiffness matrix coefficients of finite elements with variable and averaged mechanical and geometric parameters. Numerical convergence studies of results obtained using SAFEM with Fourier series, polynomials, and the finite element method were conducted for a benchmark example, which was the Boussinesq problem for a half-space subjected to a concentrated force. The results indicate that the convergence of the investigated coordinate functions in the considered problem is of the first order.

The originality. The obtained solvability indicators of SAFEM for calculating nodal reactions and stiffness matrix coefficients of finite elements with variable and averaged mechanical and geometric parameters allow for the study of various classes of problems. Numerical convergence studies using Fourier series, polynomials, and the finite element method were conducted for the benchmark example.

Practical implementation. The practical significance lies in the development of a methodology for determining the stress-strain state of relevant spatial elements of structures with variable and averaged mechanical and geometric parameters subjected to arbitrarily distributed spatial loads.

Keywords: *finite element, finite element method, semi-analytical finite element method, stress-strain state, nodal reactions, stiffness matrix, Fourier series, polynomials, numerical investigations.*