

ГІБРИДНЕ МОНОТОННЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ГІДРОЦИКЛОНА ДЛЯ ЦІЛЬОВОГО КЕРУВАННЯ ТОНКІСТЮ ПОДІЛУ

А. Ablets¹, <https://orcid.org/0009-0005-9692-9846>V. Tron¹, <https://orcid.org/0000-0002-6149-5794>¹Kryvyi Rih National University, Kryvyi Rih, Ukraine

HYBRID MONOTONIC MODELLING OF HYDROCYCLONE EFFICIENCY FOR SETPOINT CONTROL OF CUT SIZE

Мета. Розробити і перевірити (валідувати) гібридну монотонну модель кривої розділення гідроциклону, яка поєднує фізично обґрунтовану логістичну основу, обумовлену даними корекцію залишків та суворе забезпечення монотонності - для інтерпретованого прогнозування тонкості поділу d_{50} і вибору уставок під задане значення d_{50}^* .

Методика. Залежність «редуквана частка у пісках - розмір частинок» описується логістичною функцією з параметрами, що інтерпретуються як d_{50} (тонкість поділу) та крутизна кривої. Відхилення (залишки) між логістичною кривою і експериментальними даними моделюються ансамблевим методом градієнтного бустингу, після чого результуюча крива калібрується ізотонічною регресією PAV для гарантування монотонного зростання та фізичних меж $[0;1]$. Модель навчено і протестовано на відкритих експериментальних даних серії випробувань гідроциклону (з різними діаметрами патрубків та тиском живлення). Валідація здійснювалася як 5-кратна групова перехресна валідація (GroupKFold) за конфігураціями обладнання; для оцінки надійності моделі обчислено 95%-ві довірчі інтервали методом бутстрапу (вибірки з поверненням), а також побудовано карти ймовірності потрапляння d_{50} у заданий допуск.

Результати. Запропонована гібридна монотонна модель досягає середнього RMSE ~ 0.14 (проти ~ 0.23 у чисто логістичній моделі), тобто суттєво підвищує точність прогнозу. Модель коректно відтворює вплив технологічних факторів: зі збільшенням тиску живлення та звуженням діаметрів патрубків тонкість поділу d_{50} зменшується (розділення відбувається тонше). Модель також надає оцінки d_{50} навіть у випадках неповного розділення і пропонує стійкі рекомендовані уставки для досягнення цільового d_{50} .

Наукова новизна. Запропоновано гібридну логістично-ізотонічну модель із навчанням залишків, яка гарантує фізично коректну монотонну Тромп-криву в межах $[0;1]$ і знижує похибку прогнозу. Кількісно встановлено залежність d_{50} від уставок (тиску, діаметрів піскової насадки та зливного патрубка) й уведено карти ймовірності $P(|d_{50} - d_{50}^*| \leq \Delta)$ як практичний критерій вибору режимів. |

Практична значимість. Розроблена модель є інструментом для інженера-гідромеханіка: вона дає можливість швидко оцінити показник d_{50} разом із довірчим інтервалом, підібрати оптимальні уставки гідроциклону під бажане значення d_{50} з відомою ймовірністю досягнення результату, а також побудувати карти стійкої роботи системи - без затратних CFD-моделювань.

Ключові слова: гідроциклон, крива розділення, тонкість поділу d_{50} , ізотонічна регресія, монотонна калібровка, машинне навчання, уставки.

Вступ і огляд літератури. Гідроциклони широко застосовуються для розділення дрібнодисперсних суспензій у гірничо-збагачувальній галузі, хімічній технології та очищенні води. Важливою характеристикою процесу класифікації є тонкість поділу (показник d_{50}) – розмір частинок, при якому половина потрапляє до пісків, а половина – у злив. Редукована частка у пісках (частка матеріалу даного класу, що виходить у піски через піскову насадку) є безрозмірною (від 0 до 1) і зростає зі збільшенням розміру частинок і за ідеальних умов має S-подібну форму, відому як крива розділення (Тромп-крива), детально описану в працях Bradley [1] та Svarovsky [2]. На практиці крива розділення може мати аномалії на тонкому боці через перепад тиску та тонкі частини, що проходять у піски разом із рідиною [3]. Геометричні параметри гідроциклона, передусім діаметри піскової насадки та зливного патрубку, а також робочий тиск живлення суттєво впливають на d_{50} та форму кривої розділення [4]. Зменшення діаметра піскової насадки або збільшення тиску, як правило, приводить до тоншого поділу (меншого d_{50}), проте надмірне звуження піскової насадки чи підвищення тиску може знизити загальну ефективність за рахунок втрат рідини і дрібних частинок у злив [1, 4].

Традиційно для прогнозування роботи гідроциклонів використовуються емпіричні моделі та напівемпіричні залежності, що виражають d_{50} та інші показники через геометрію і режимні параметри [1, 4]. Такі моделі швидкі в розрахунках, проте вони обмежені припущеннями лінійності і часто не враховують індивідуальні особливості кривих розділення. Комп'ютерне моделювання методом CFD дозволяє детально врахувати гідродинаміку і багатофазні ефекти у гідроциклоні, але потребує значних обчислювальних ресурсів і складної калібровки [5]. Наприклад, у дослідженні Pathirickattu та співавт. [6] методи машинного навчання успішно застосовано для прогнозування показників роботи гідроциклонів. Такі моделі (наприклад, нейронні мережі або ансамблеві методи) здатні виявляти приховані нелінійні залежності і досягати високої точності [6]. Проте «чорні ящики» моделей машинного навчання (ML) викликають занепокоєння щодо фізичної інтерпретації та узгодженості з законами процесу. Зокрема, стандартні ML-підходи не гарантують монотонності кривої розділення – модель може прогнозувати неможливе зниження ефективності з ростом розміру частинок, якщо явно не врахувати цю вимогу [7]. Наявність немонотонних або нефізичних ділянок у кривих знижує довіру інженерів до моделей і ускладнює подальше керування процесом.

Таким чином, існує потреба у підходах моделювання, які поєднують гнучкість ML з фізичною інтерпретованістю та апіорними обмеженнями монотонності [8]. Ідея так званого physics-informed ML або наукового машинного навчання полягає в тому, щоб «вбудувати» фізичні закономірності чи структуру моделі в процес навчання, тим самим підвищивши достовірність та екстраполяційні можливості моделі [9]. У даній роботі реалізовано гібридний підхід: базовою основою моделі є фізично обґрунтована логістична функція, параметри якої (d_{50} та крутизна k) оцінено з експериментальних даних для кожної конфігурації гідроциклона. На цю основу нашаровується ML-модель для корекції залишків, а остаточний результат коригується ізотонічною регресією, щоб строго забезпечити монотонне зростання ефективності із збільшенням розміру частинок. Подібна післяобробка широко використовується для калібрування моделей [7, 10] і гарантує виконання вимоги монотонності.

Для побудови і перевірки моделі використано відкриті експериментальні дані [11], що охоплюють серію випробувань гідроциклона AKW RWK-42L з різними діаметрами патрубків та тиском. Уся реалізація моделі та обчислювальні експерименти виконані у відкритому програмному середовищі, вихідний код та дані доступні у репозиторії GitHub [12].

Мета статті. Метою роботи є розроблення та валідація гібридної монотонної моделі ефективності гідроциклона, яка забезпечує фізично узгоджену форму кривої розділення, стабільні оцінки тонкості поділу d_{50} та дозволяє підбирати технологічні уставки гідроциклона під задану цільову тонкість d_{50}^* з оцінкою імовірності дотримання допуску.

Матеріали та методи. Для аналізу використано відкритий набір даних Mendeley Data [11], що містить результати серії експериментів з гідроциклоном моделі AKW RWK-42L. Установку випробували на суспензії бентонітової глини; змінювались діаметр піскової насадки (арех), діаметр зливного патрубка (vortex finder) та тиск живлення. Для кожної конфігурації патрубків і тиску було отримано гранулометричний склад живлення та виміряно ефективність класифікації (частка частинок кожного класу, що потрапила до пісків). Усі розрахунки і моделювання виконано в Python із використанням бібліотек scikit-learn, numpy, pandas тощо.

Для досягнення мети побудовано параметричну базову модель кривої розділення у вигляді логістичної функції $\sigma(k(D_p - d_{50}))$ з параметрами d_{50} та крутизною k , одержаними з експериментальних даних для кожної конфігурації гідроциклона; далі навчено модель машинного навчання корекції залишків із розширеними ознаками (розмір частинок D_p , геометричні параметри, тиск тощо) та застосовано постобробку ізотонічною регресією, щоб гарантувати строго монотонний вихід у (D_p) . Узагальнювальну здатність оцінено груповою перехресною валідацією (GroupKFold) за конфігураціями («піскова насадка, зливний патрубок, тиск»), а також виконано абляційний аналіз варіантів (без залишку моделі, без монотонізації). Для кожної конфігурації визначено d_{50} із бутстрап-довірчими інтервалами та відміткою цензурування у разі недосягнення рівня 0.5. Нарешті, розв'язано задачу підбору уставок гідроциклона під задане d_{50}^* і побудовано карти ймовірності виконання допуску $|d_{50} - d_{50}^*| \leq \Delta$.

Модель гібридної монотонної класифікації. Базова крива розділення моделюється параметричною логістичною функцією, яка набуває значень від 0 до 1 і має вигляд:

$$y_{base}(D_p) = \sigma(k(D_p - d_{50})) = \frac{1}{1 + \exp[-k(D_p - d_{50})]}, \quad (1)$$

де $\sigma(z) = \frac{1}{1 + \exp^{-z}}$ – логістична функція, D_p – характерний розмір частинок (мкм) у класі; d_{50} (мкм) – параметр тонкості поділу (розмір частинки, при якому $y_{base} = 0.5$), k – параметр крутизни кривої (чим більше k , тим крутіше відбувається перехід від 0 до 1). Відповідно до фізичного змісту, d_{50} визначає горизонтальне положення S-подібної кривої, а k пов'язаний з гідродинамічною «розмитістю» розділення: менші значення k відповідають більш пологій (нечіткій) кривій, більші k – більш

різкій сепарації. Рисунок 1 демонструє залежність форми кривої розділення від параметра крутизни k за незмінної тонкості поділу d_{50} . Добре видно, що зі зростанням k перехід від області дрібних частинок, які переважно потрапляють у злив, до області крупних частинок, що майже повністю виходять у піски, відбувається різкіше і локалізується в більш вузькому діапазоні розмірів. Такий характер кривої відповідає підвищеній чіткості процесу класифікації. Натомість при менших значеннях k крива є більш пологою, що свідчить про «розмитий» характер поділу, коли значна частка проміжних за розміром частинок розподіляється випадковим чином між продуктами. Це відображає фізичну інтерпретацію параметра крутизни: він характеризує ступінь визначеності процесу відсікання частинок і пов'язаний з гідродинамічними умовами у робочому просторі гідроциклону.

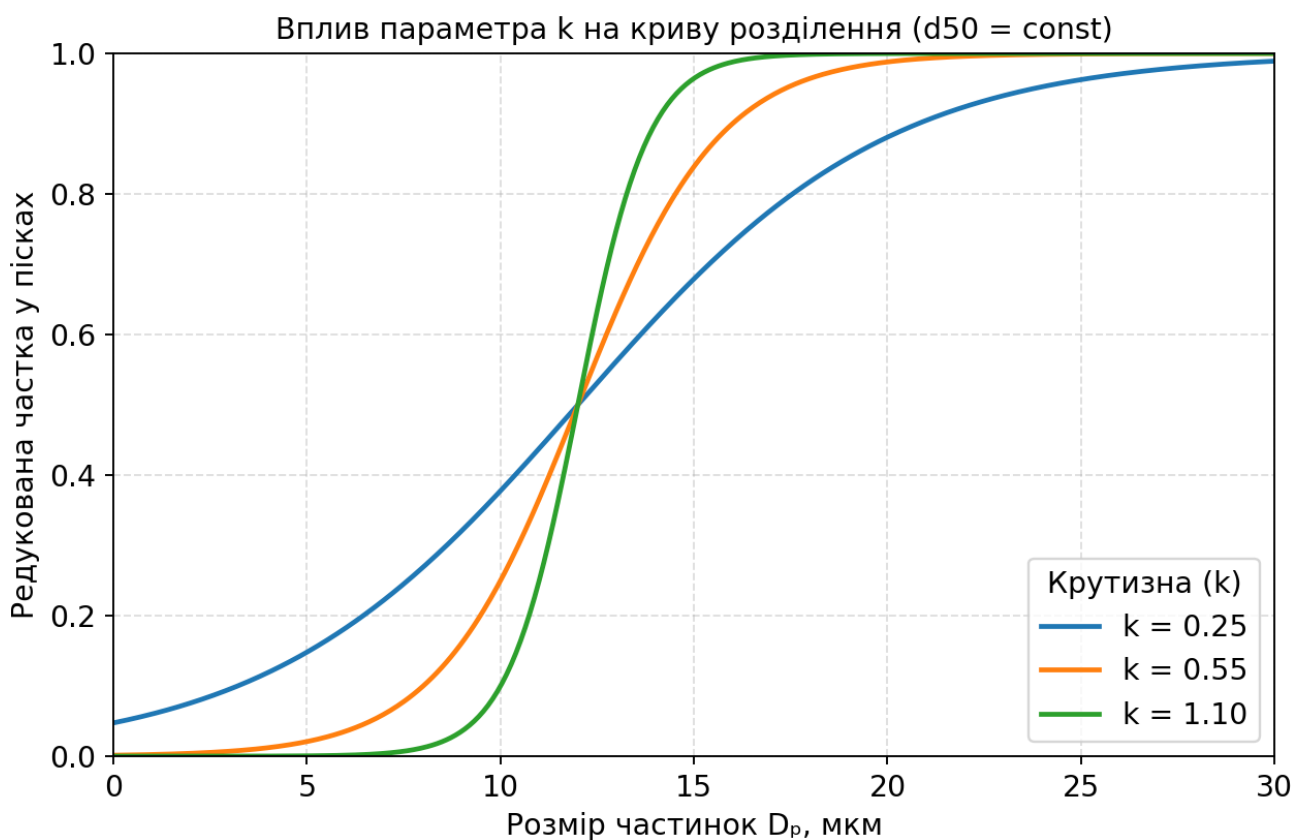


Рис. 1. Вплив параметра k на криву розділення за сталого d_{50} : зі зростанням k перехід стає крутішим (звужується зона переходу).

Для кожної конфігурації гідроциклону початкові оцінки d_{50} та k отримано із експериментальних даних шляхом аналізу емпіричної кривої розділення. Зокрема, використано ізотонічну регресію для монотонного згладжування залежності $y(D_p)$ в межах однієї конфігурації. За згладженою кривою визначено точку, де ефективність становить 50% (якщо така точка лежить в діапазоні наявних даних) - це оцінка d_{50} . У випадках, коли крива не досягає рівня 0.5 (наприклад, якщо весь діапазон розмірів дає ефективність нижче 50%), значення d_{50} умовно вважається більшим за максимальний наявний розмір (позначається як цензуроване справа), і навпаки, якщо ефективність перевищує 50% уже на найдрібніших

частках – d_{50} менше мінімального розміру (ліве цензурування). Крутизну k оцінено за допомогою локальної лінійної апроксимації логіт-функції поблизу точки $y = 0.5$. Отримані параметри (d_{50}, k) далі використано для початкової параметризації моделі. Відзначимо, що ці оцінки доволі грубі і слугують лише стартовим наближенням, яке потім може бути скориговане ML-моделлю.

Наступний шар моделі - корекція залишків. Нехай $y_{\text{exp}}(D_p)$ – експериментально спостережена редукована частка у пісках для певної конфігурації і розміру частинок. Тоді залишок визначимо як

$$r(D_p) = y_{\text{exp}}(D_p) - y_{\text{base}}(D_p), \quad (2)$$

де $y_{\text{exp}}(D_p)$ – експериментально спостережена редукована частка у пісках, $y_{\text{base}}(D_p)$ – базова логістична оцінка.

На всіх доступних точках (для всіх конфігурацій і розмірів) сформовано вибірку залишків. В якості ознак використано поточний розмір D_p (а також його квадратичне та кубічне перетворення D_p^2 , D_p^3 для гнучкості), d_{apex} (діаметр піскової насадки, мм), d_{vortex} (діаметр зливного патрубку, мм), P (тиск, бар), кілька інтерактивних ознак, що утворені як комбінації параметрів (наприклад, відношення D_p/d_{apex} , D_p/d_{vortex} , а також добутки параметрів тощо), y_{base} – значення базової логістичної функції (це вводить нелінійність, пов'язану з початковою формою кривої).

Таким чином, ознаковий простір включає як експериментальні фактори, так і допоміжні змінні, що можуть покращити апроксимацію. Для моделювання залишкової залежності $r(D_p)$ було протестовано кілька алгоритмів: градієнтний бустинг регресії (GBR, Gradient Boosting Regressor), екстремально випадкові дерева (ExtraTrees) та гістограмний бустинг (HistGradientBoosting) із бібліотеки Scikit-Learn. Ці методи здатні моделювати довільні нелінійні взаємозв'язки. Навчання проводилось на 80% даних (у розрізі підвибірок), оптимізація гіперпараметрів здійснювалась на основі внутрішньої перехресної-валідації (використовувались стандартні параметри, близькі до оптимальних: наприклад, для градієнтного бустингу - 100 дерев глибиною до 5, швидкість навчання (learning rate) 0.1; для екстремально випадкових дерев - 200 дерев без обрізки гілок; для гістограмного бустингу - 100 ітерацій, максимальна глибина 6).

Складена гібридна модель дає початковий прогноз ефективності:

$$y_{\text{raw}}(D_p) = \text{clip}_{[0,1]}(y_{\text{base}}(D_p) + r(D_p)), \quad (3)$$

де $r(D_p)$ – вихід моделі залишку, а $\text{clip}_{[0,1]}$ обмежує значення інтервалом $[0,1]$ (щоб виключити незначні негативні або понад 100% значення на краях). Проміжний прогноз $y_{\text{raw}}(D_p)$ у загальному випадку не гарантує монотонності за D_p , тому фінальним кроком застосовано постобробку ізотонічною регресією окремо для кожної конфігурації гідроциклону. Для конфігурації (фіксовані d_{apex} , d_{vortex} , P) беремо дискретну залежність $y_{\text{raw}}(D_p)$ у всіх точках D_p (що відповідали експериментальним замірам) і обчислюємо монотонно неубуваючу функцію $y(D_p)$, що мінімізує відхилення від $y_{\text{raw}}(D_p)$ у сенсі квадратичної помилки, з умовою $y(D_{p,i}) \leq y(D_{p,j})$ при $D_{p,i} < D_{p,j}$ для всіх i, j . Ця задача розв'язується

алгоритмом pool-adjacent-violators (PAV) [7]. В результаті отримуємо скориговану $y(D_p)$, яка є строго монотонною по D_p і максимально наближена до вихідного прогнозу. З практичних міркувань монотонізація також проводилась на екстрапольованих краях: якщо для найменшого $D_{p,\min}$ прогноз y_{raw} був не нуль, його зменшували до 0; якщо для найбільшого $D_{p,\max}$ прогноз не досяг 1, його збільшували до 1 (це відповідає фізичним межам при $D_p \rightarrow 0$ і $D_p \rightarrow \infty$). Таким чином, остаточна модель $y(D_p)$ повністю задовольняє фізичній інтуїції (зростає від 0 до 1) і водночас точно проходить через експериментальні тенденції.

Для підвищення ефективності навчання деякі навчальні приклади було зважено. Вага кожної точки кривої для конфігурації пропорційна частці частинок цього діапазону в живленні. Для кожного інтервалу розмірів $D_{p,i}$ задано індивідуальну об'ємну частку у живленні. Таким чином, модель приділяє більшу увагу тим ділянкам кривої, які відповідають значущим фракціям (наприклад, якщо у живленні мало дуже великих часток, то похибка в тій області менш критична).

Схема валідації і критерії. Для об'єктивної оцінки узагальнювальної здатності моделі використано перехресну-валідацію по конфігураціях. Весь набір експериментальних точок розбивався на 5 частин таким чином, що всі дані однієї конфігурації (d_{apex} , d_{vortex} , P) цілком належали одній підвибірці.

Основною метрикою точності обрано корінь середньоквадратичної помилки (RMSE) між прогнозованими і експериментальними значеннями редукованої ефективності (в межах тестової підвибірки). Вимірювання ефективності мають шум, тому R^2 ідеально не досягає 1 навіть для бездоганної моделі; RMSE зручний тим, що виражається у тих же одиницях, що й цільова змінна (частка 0–1). Для кожного варіанту моделі визначався середній RMSE і медіанний RMSE по 5 підвибірках. 95% довірчий інтервал (ДІ) для середнього RMSE оцінено бутстрап-методом: генерацією 1000 випадкових вибірок з витягуванням з 5 значень RMSE-підвибірок і обчисленням квантилів 2.5% та 97.5%.

Крім агрегованої метрики, проаналізовано також показники для окремих конфігурацій. Зокрема, для кожної конфігурації розраховано її «спостережене» d_{50} та «прогнозоване» d_{50} . Спостережене d_{50} визначено на емпіричній кривій (після ізотонічного згладжування експериментальних даних для даної конфігурації). Якщо емпірична крива не досягала 50% ефективності навіть на найбільшому наявному розмірі, таку оцінку d_{50} позначали як $> D_{\max}$; якщо ж ефективність була понад 50% вже на мінімальних розмірах - як $< D_{\min}$. Прогнозоване d_{50} знаходили вже за змодельованою кривою $y(D_p)$ (після монотонізації). Це робилося шляхом інтерполяції: брали висоту 0.5 на осі y і знаходили відповідний D_p на графіку (якщо y досягала 0.5 у рамках $[D_{p,\min}, D_{p,\max}]$). У разі, якщо модельна крива ще не досягла 0.5 на $D_{p,\max}$, прогнозоване d_{50} трактували як більше за $D_{p,\max}$ (і аналогічно для малого). Для оцінки довірчого інтервалу прогнозованого d_{50} використано бутстрап: моделювання 800 повторних вибірок з даних конфігурації (з перестановкою залишків моделі) та обчислення d_{50} для кожної; за

вибіркою отримано 95% ДІ. Усі результати по d_{50} зведено в таблицю, де додано позначку цензурування (*censor* - none, < або >).

Останній блок аналізу стосується оптимізації параметрів гідроциклону під задану ціль. Використовуючи навчену модель $y(D_p, d_{\text{apex}}, d_{\text{vortex}}, P)$, можна передбачити значення d_{50} для будь-якої комбінації патрубків і тиску (в межах дослідженого діапазону). Задамо кілька цільових значень d_{50}^* (у роботі розглянуто 10, 12 та 15 мкм – як приклади різної тонкості класифікації). Для кожного d_{50}^* здійснено перебір усіх доступних варіантів $d_{\text{apex}}, d_{\text{vortex}}, P$ з експериментального набору і обрано 20 найкращих конфігурацій з найменшим модулем відхилення $|d_{50} - d_{50}^*|$. Таким чином формується рекомендований список уставок (зазначаючи їх передбачений d_{50} і похибку від цілі). Оскільки модель надає не лише точковий прогноз, а й оцінку невизначеності (бутстрап-розкид d_{50}), далі оцінено стійкість кожної уставки: ймовірність того, що фактичне d_{50} для цієї уставки потрапить у заданий допуск до d_{50}^* . Формально, ймовірність $P(|d_{50} - d_{50}^*| \leq \Delta)$ обчислено як частку бутстрап-реалізацій d_{50} , для яких виконувалась нерівність (у роботі використано $\Delta = 2.0$ мкм). Для наочності, результати подано у вигляді теплових карт: по осях відкладаються два параметри (наприклад, діаметр піскової насадки і тиск), а кольором позначено ймовірність досягти d_{50} у допуску при фіксованому третьому параметрі (діаметрі зливного патрубка). Такі діаграми дозволяють ідентифікувати області в просторі уставок, де досягнення цілі найбільш вірогідне з урахуванням невизначеності моделі.

Результати. У таблиці наведено порівняння результатів крос-валідації (GroupKFold, 5 підвибірок) для різних варіантів моделі. Гібридна модель з ізотонічною постобробкою продемонструвала найкращі показники: середній RMSE 0.137 для Hybrid (ExtraTrees, isotonic), медіанний RMSE 0.045, що істотно краще за логістичну базову модель (RMSE 0.226). Градієнтний бустинг (GBR) і гістограмний бустинг (HistGB) показали близький рівень помилки, тоді як алгоритм екстремально випадкових дерев зменшив RMSE, ймовірно завдяки усередненню більшої кількості дерев.

Таблиця

Результати моделювання

Варіант моделі	RMSE (середній)	RMSE (медіана)
Hybrid (ExtraTrees, isotonic)	0.137	0.045
Hybrid (HistGB, isotonic)	0.145	0.073
Hybrid (GBR, isotonic)	0.146	0.058
Logistic-only	0.226	0.161

Вплив тиску живлення на форму кривої розділення за незмінної геометрії гідроциклону представлено на рис. 2. На графіку показано залежність редукованої частки у пісках від розміру частинок D_p для кількох рівнів тиску – від 3 до 30 бар. Спостерігається закономірність, що зі зростанням тиску крива поступово

зміщується вліво і стає крутішою, що відповідає зменшенню значення d_{50} та тоншому поділу. При низьких тисках (3–4 бар) розділення є відносно грубим, і лише частинки більшого діаметра потрапляють у піски з високою ймовірністю. Натомість при підвищенні тиску до 20–30 бар розділення відбувається значно чіткіше, і навіть дрібні фракції ефективно вилучаються у піски. Водночас надмірне підвищення тиску може призвести до небажаних ефектів, таких як збільшення гідравлічних втрат чи винесення дрібних частинок у злив, що необхідно враховувати при оптимізації режимів роботи. Таким чином, наведені криві підтверджують ключову роль тиску як керованого технологічного параметра, що визначає ефективність класифікації.

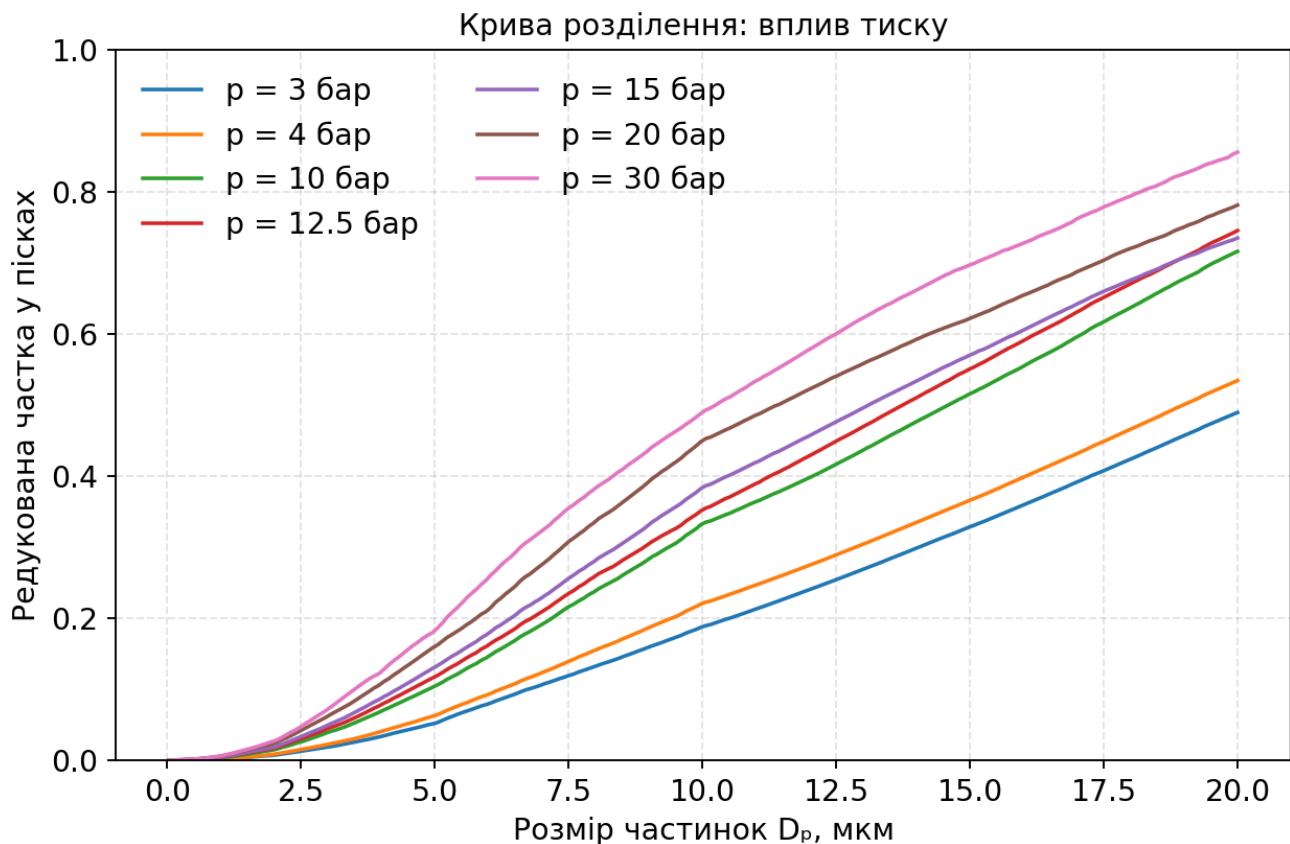


Рис. 2. Крива розділення: вплив тиску (піськова насадка та зливний патрубок - фіксовані). По осі Y – редукована частка у пісках

Рис. 3 відображає ізолінії розрахункових значень тонкості поділу d_{50} на площині «діаметр піскової насадки × діаметр зливного патрубку» за сталого тиску живлення. Світліші області на карті відповідають більшим значенням d_{50} , тобто грубішому розділенню, тоді як темніші зони вказують на дрібніший поділ, коли крива розділення зміщується вліво. Ізолінії демонструють чіткий комбінований вплив обох геометричних параметрів: зменшення діаметра піскової насадки сприяє інтенсифікації процесу класифікації та зниженню d_{50} , водночас звуження зливного патрубку також сприяє досягненню тоншого поділу за рахунок підвищення циркуляції та зміни гідродинаміки потоку. Разом ці тенденції відображають фізичну взаємодію конструктивних параметрів гідроциклону і

підтверджують, що оптимізація роботи апарата повинна враховувати не лише окремі значення патрубків, а й їхні пропорції та взаємозв'язки, що визначають режимні характеристики розділення.

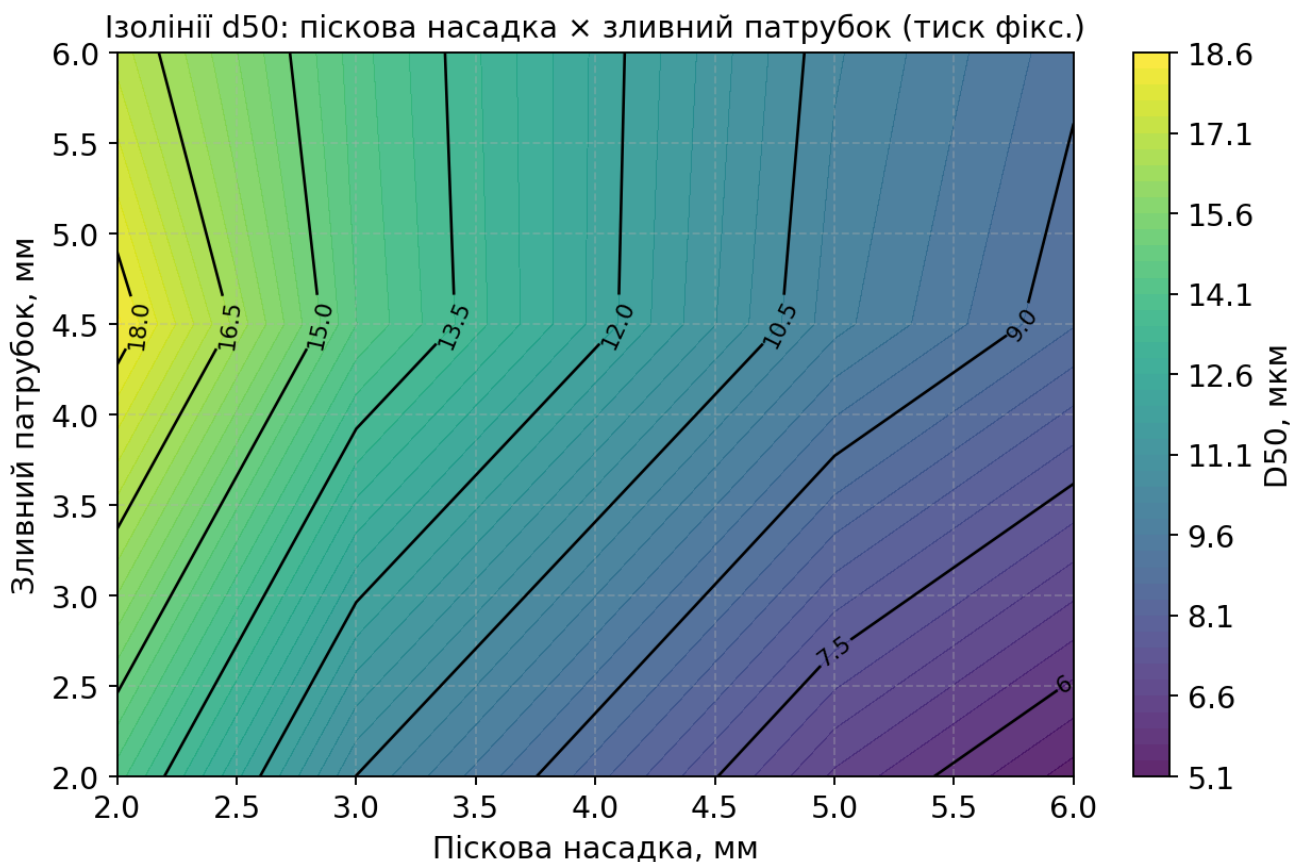


Рис. 3. Ізолінії d_{50} на площині «піскова насадка × зливний патрубок» (тиск фіксований); темніші зони відповідають меншим d_{50} .

На рис. 4 представлено тривимірну поверхню прогнозованої редукованої частки у пісках $y(D_p, d_{\text{арех}})$ за сталих значень діаметра зливного патрубка та тиску живлення. На графіку чітко простежується закономірність: зі зростанням розміру частинок D_p ефективність вилучення у піски закономірно підвищується, наближаючись до одиниці для найбільших фракцій. Одночасно вплив діаметра піскової насадки проявляється у вертикальному зміщенні поверхні – зменшення її діаметра сприяє підвищенню редукованої частки у пісках, що відображає інтенсифікацію процесу класифікації. Наведене просторове представлення дозволяє візуалізувати нелінійну взаємодію між геометричними параметрами та розміром частинок, демонструючи плавний перехід від зони майже повного винесення дрібних фракцій у злив до області їхнього практично повного вилучення у піски. Така форма поверхні підтверджує адекватність гібридної моделі та її здатність забезпечувати фізично узгоджене прогнозування в умовах змінних уставок.

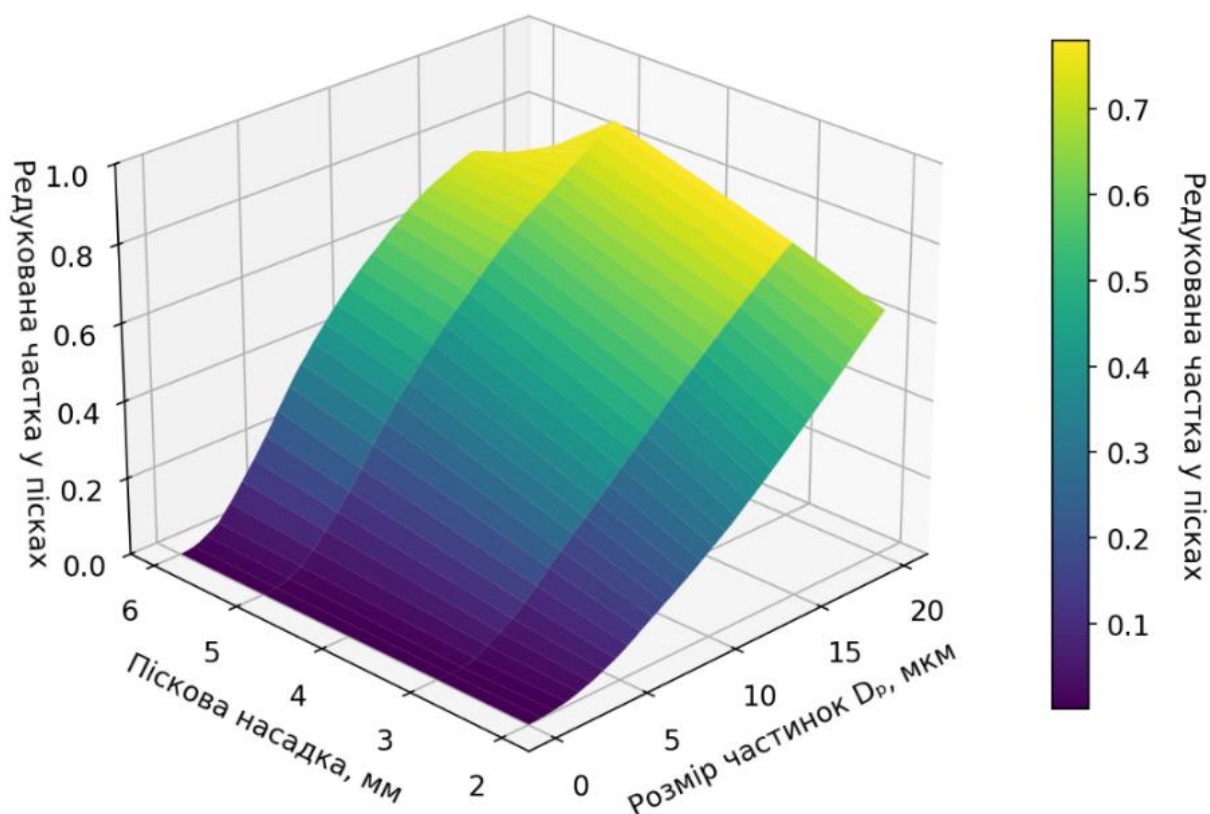


Рис. 4. Поверхня редукованої частки у пісках $y(D_p, d_{арех})$
(зливний патрубок і тиск – фіксовані)

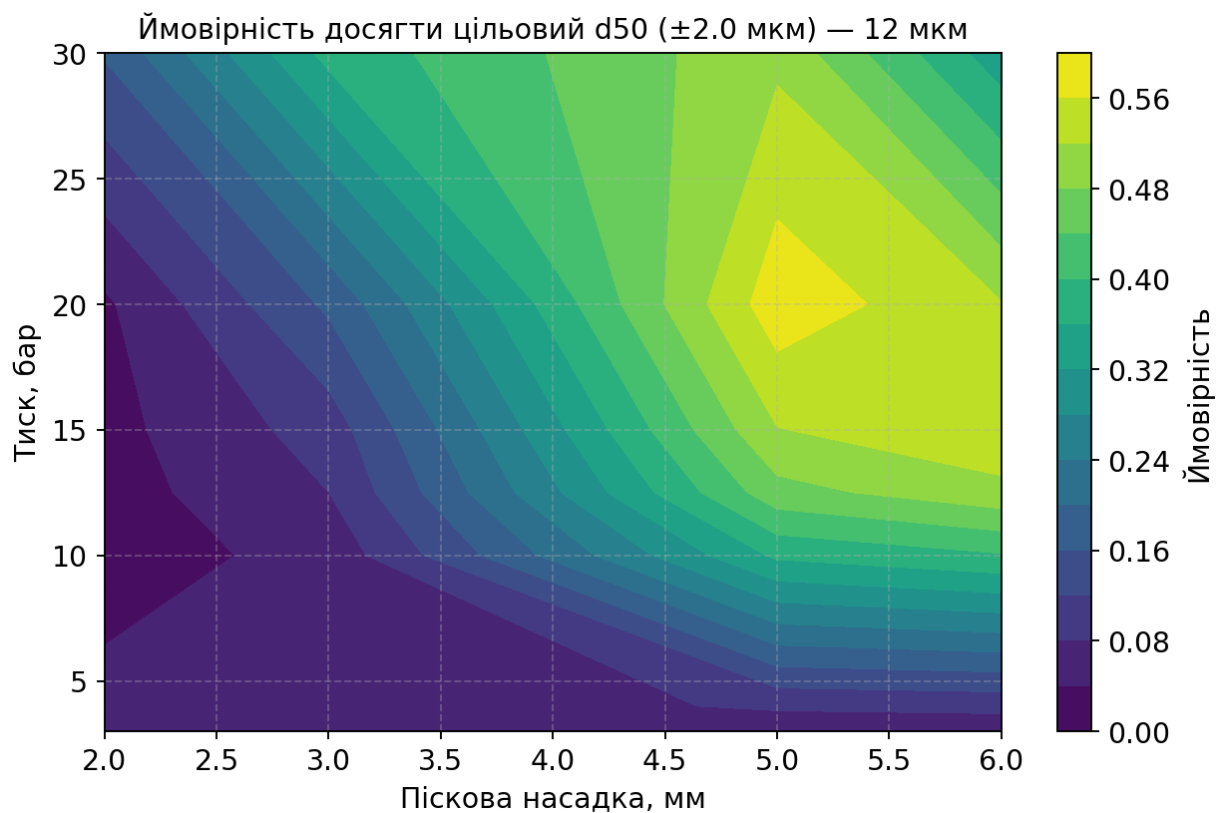


Рис. 5. Теплова карта імовірності $P(|d_{50} - d_{50}^*| \leq \Delta)$ на площині
«піскова насадка $\times$ тиск» за фіксованого зливного патрубка
для $d_{50}^* = 12$ мкм, $\Delta = 2.0$ мкм

Результати оптимізації уставок гідроциклона відносно цільового значення тонкості поділу $d_{50}^* = 12 \mu\text{m}$ із допуском $\Delta = \pm 2.0 \mu\text{m}$ представлено на рис. 5. На площині «діаметр піскової насадки $\times$ тиск живлення» при сталому діаметрі зливного патрубку показано теплову карту імовірності $P(|d_{50} - d_{50}^*| \leq \Delta)$, яка оцінювалася методом бутстрап-моделювання. Найвищі значення ймовірності (світлі ділянки) спостерігаються при середніх та підвищених тисках (близько 20–25 бар) у поєднанні з діаметрами піскової насадки порядку 4.5–5.5 мм, що свідчить про оптимальний баланс між гідродинамічними умовами та конструктивними параметрами. Натомість при низьких тисках або малих діаметрах насадки ймовірність потрапляння у заданий допуск є істотно нижчою, що підтверджує чутливість процесу до режимних факторів.

Інтерпретація результатів. Запропонована гібридна модель поєднала в собі кращі риси емпіричних підходів та гнучкість ML. Логістична функція як базис задає фізично обґрунтовану форму кривої розділення, наближену до класичної S-подібної Тромп-кривої [1]. Це забезпечило інтерпретованість параметрів: кожній конфігурації гідроциклона зіставлено показник d_{50} (тонкість поділу) та параметр крутизни k , які можна порівнювати між собою і з літературними даними. ML-модель на основі ансамблевих методів «доопрацювала» локальні особливості кривих, зумовлені впливом конкретних факторів, які не охоплюються простою логістичною формулою.

Висновки. У роботі представлено новий підхід до моделювання процесу гідроциклонної класифікації, який поєднує машинне навчання і фізичну інтерпретованість. Новизна запропонованого підходу полягає в тому, що вперше для моделювання гідроциклонів об'єднано машинне навчання з апріорними фізичними обмеженнями монотонності кривої розділення. Запропонована гібридна модель продемонструвала високу валідність: на експериментальних даних вона суттєво перевершує традиційну логістичну модель за точністю (RMSE знижено приблизно на 40 % ($0.226 \rightarrow 0.137$)). Модель є придатною для практичного застосування – її можна інтегрувати в системи керування гідроциклоном для прогнозування d_{50} та вибору оптимальних режимів роботи без необхідності трудомістких експериментів. Отримані результати відкривають можливості для подальших досліджень: зокрема, планується поширити запропонований підхід на інші типи класифікаційних процесів та вдосконалювати модель шляхом врахування додаткових фізичних факторів.

Перелік посилань

1. Bradley, D. (1965). *The hydrocyclone*. Pergamon Press.
2. Svarovsky, L. (1984). *Hydrocyclones*. Holt, Rinehart & Winston.
3. Frachon, M., Cilliers, J. J., & Svarovsky, L. (1999). A general model for hydrocyclone partition curves. *Chemical Engineering Journal*, 73(1), 53–59. [https://doi.org/10.1016/S1385-8947\(99\)00040-6](https://doi.org/10.1016/S1385-8947(99)00040-6)
4. Plitt, L. R. (1976). A mathematical model of the hydrocyclone classifier. *CIM Bulletin*, 69(776), 114–123.
5. Gama, A. J. A., Neves, G. A., Barros, P. L., Neto, A. T., & Alves, J. J. (2020). Hydrocyclone performance for bentonite clay purification. *Chemical Engineering Research and Design*, 161, 168–177. <https://doi.org/10.1016/j.cherd.2020.07.005>

6. Pathirikattu, A., & Vakamalla, T. R. (2025). Exploration of machine learning models for hydrocyclone performance parameters prediction. *Powder Technology*, 407, 117773. <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2025.121355>
7. Zadrozny, B., & Elkan, C. (2002). Transforming classifier scores into accurate multiclass probability estimates. In *Proceedings of the Eighth ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining (KDD 2002)* (pp. 694-699). Edmonton, Canada: ACM. <https://doi.org/10.1145/775047.775151>
8. Karpatne, A., Atluri, G., Faghmous, J., Steinbach, M., Banerjee, A., Ganguly, A., Shekhar, S., Samatova, N., & Kumar, V. (2017). Theory-guided data science: A new paradigm for scientific discovery from data. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 29(10), 2318–2331. <https://doi.org/10.1109/TKDE.2017.2720168>
9. Willard, J., Jia, X., Xu, S., Steinbach, M., & Kumar, V. (2022). Integrating physics-based modeling with machine learning: A survey. *ACM Computing Surveys*, 55, 1–37. <https://doi.org/10.1145/3514228>
10. Niculescu-Mizil, A., & Caruana, R. (2005). Predicting good probabilities with supervised learning. In *Proceedings of the 22nd International Conference on Machine Learning (ICML 2005)* (pp. 625-632). Bonn, Germany: ACM. <https://doi.org/10.1145/1102351.1102430>
11. Gama, A. J. A., Neves, G. A., Barros, P. L., Neto, A. T., & Alves, J. J. (2020). *Hydrocyclone performance for bentonite clay purification* (Version 2) [Data set]. Mendeley Data. <https://doi.org/10.17632/vt3hthxstk.2>
12. Ablets, A. V. (2025). Hydrocyclone-d50-hybrid (GitHub repository). GitHub. <https://github.com/AndreiAblets/Hydrocyclone-d50-hybrid>

ABSTRACT

Purpose. To develop and validate a hybrid monotonic model of the hydrocyclone partition curve that combines a physics-based logistic component, a data-driven residual correction, and an enforced monotonic output - for interpretable prediction of the cut size (d_{50}) and selection of operating setpoints to achieve a target d_{50} .

The methods. The partition curve (reduced partition to underflow (fraction) vs particle size) is represented by a logistic function with interpretable parameters d_{50} and steepness. The deviations of experimental data from this logistic baseline are learned by an ensemble machine learning method (gradient boosting regression), and the combined prediction is then calibrated using isotonic regression (PAV algorithm) to ensure strictly monotonic increase and correct probability bounds [0,1]. The model was trained and tested on an open experimental dataset of hydrocyclone tests spanning various apex (underflow orifice) / vortex finder (overflow pipe) diameters and feed pressures. Model validation uses 5-fold grouped cross-validation (GroupKFold by cyclone configuration); in addition, 95% bootstrap confidence intervals were computed for the average error, and probability maps were generated to estimate the chance of hitting a target cut size under varying conditions.

Findings. The hybrid monotonic model achieved an average RMSE of ~0.14 (vs ~0.23 for the logistic-only baseline), demonstrating significantly higher accuracy. The model reproduces known pressure and geometry trends: increasing feed pressure or decreasing the apex/vortex diameters leads to a finer separation (lower d_{50}). The hybrid model also provides valid cut-size estimates even in edge cases of incomplete separation (censored data) and yields robust recommended setpoints to attain a desired d_{50} .

The originality. We propose a hybrid logistic–isotonic model with residual learning that enforces a physically consistent monotonic partition curve within [0,1] and reduces prediction error. The work quantitatively establishes the dependence of d_{50} on setpoints (pressure, apex and vortex-finder diameters) and introduces probability maps $P(|d_{50} - d_{50}^*| \leq \Delta)$ as a practical criterion for setpoint selection.

Practical implementation. The resulting model can serve as a practical engineering tool for hydrocyclone operation: it enables quick estimation of the cut size with confidence intervals, helps select operating parameters (setpoints) to achieve a target cut size with a quantified probability of success, and provides maps of stable operating regimes - all without time-consuming CFD simulations or extensive experimental trials.

Keywords: *hydrocyclone, partition curve, cut size d_{50} , isotonic regression, monotonic calibration, machine learning, setpoint.*

дата першого надходження статті до видання	02.07.2025
дата прийняття до друку статті після рецензування	03.08.2025
дата публікації (оприлюднення)	04.09.2025